УДК 33:519.2

А.Ю.ЛУКОНИН, Ю.А.ЛУКОНИН

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПРОДАЖ С ПОМОЩЬЮ СЛОЖНЫХ ПУАССОНОВСКИХ ПОТОКОВ

Случайный процесс продаж рассматривается как случайный пуассоновский поток коммерческих сделок, размеры которых также являются случайной величиной. Показано, что если известно распределение вероятностей размеров сделок и плотность потока покупателей, то можно вычислить распределение вероятностей размеров продаж. Сформулированы условия, при которых это распределение продаж не будет нормальным. Приведены примеры негауссовских распределений в реальных процессах продаж.
Ключевые слова: *случайные процессы, случайные пуассоновские потоки, распределение вероятностей размеров продаж, микроэкономика фирмы.*

Введение. Процессы продаж являются разновидностью потоков коммерческих сделок, в которых в основу стохастических моделей положен пуассоновский характер потока сделок, характеризующийся как случайный нестационарный поток независимых событий без последействия.

Обозначим $\lambda(t)$ - плотность потока покупателей. Тогда количество продаж m за интервал времени длиной τ, начинающийся в точке t_0, подчиняется закону Пуассона

$$P_m(\tau, t_0) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (m = 0,1,...), \tag{1}$$

где a - математическое ожидание числа продаж на участке $[t_0, t_0 + \tau]$,

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt. \tag{2}$$

Распределение вероятностей p_k потребности покупателя в k единицах товара будем называть в дальнейшем распределением потребностей покупателя в товаре. Тогда случайная величина N, равная количеству проданного товара за интервал $[t_0, t_0 + \tau]$, может быть выражена следующим образом:

$$N = \sum_{l=1}^{m} k_l \ , \tag{3}$$

где m - случайное число покупателей на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$, имеющее распределение (1), а k_l - количество товара, купленное l-м покупателем: случайная величина, имеющая распределение вероятностей

p_k, $k = 1,2,...$ (p_k - вероятность того события, что один покупатель купит *k* единиц товара).

Можно определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины N [1]:

$$M[N] = M[k]*a, \tag{4}$$

$$D[N] = ((M[k])^2 + D[k])*a, \tag{5}$$

где $M[*]$, $D[*]$ - математическое ожидание и дисперсия соответственно; величина a задается выражением (2);

$$M[k] = \sum_{k=1} k*p_k; \quad D[k] = \sum_{k=1} (k - M[k])^2 * p_k.$$

Соотношения (4) и (5) являются достаточными для описания статистических характеристик сложного пуассоновского потока N [1] только в том случае, когда величина N распределена по нормальному закону. Именно на предположении о том, что величина N распределена нормально, строится современная логистика управления запасами. Однако в работе [2] это фундаментальное предположение подвергается сомнению и приводятся примеры, когда эмпирические оценки распределений вероятностей сложных товарных потоков мало похожи на гауссовские распределения.

В работе [1] отмечается, что сложные пуассоновские потоки имеют сложные распределения, не имеющие аналитического выражения. Тем не менее, такие распределения нужно рассчитывать для построения систем управления товарными и финансовыми потоками фирмы. Поэтому рассмотрим алгоритм вычисления функции распределения вероятностей для случайной величины N.

Распределение вероятностей для сложных пуассоновских потоков. Пусть распределение потребностей покупателя p_k определено на всей числовой оси $-\infty < k < \infty$: $p_k = 0$ при $k \le 0$ и $p_k \ge 0$, при $k > 0$, а поток покупателей имеет характеристики (1) – (2). Тогда вероятность того, что m покупателей купят N единиц товара, равна

$$Q_m(N) = \sum_{k_1=-\infty} p_{k_1} \sum_{k_2=-\infty} p_{k_2} \cdots \sum_{k_{m-1}=-\infty} p_{k_{m-1}} p_{N-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1}}, \tag{6}$$

а вероятность того, что на интервале $[t_0, t_0 + T]$ будет продано N единиц товара, равна

$$P(N; t_0, T) = \sum_{m=1} P_m(T, t_0) Q_m(N), \tag{7}$$

где $P_m(T, t_0)$ - вероятность появления m покупателей товара на интервале $[t_0, t_0 + T]$, определяемая соотношениями (1) – (2).

В правой части выражения (6) сделаем замену переменных:

$$
\begin{aligned}
&l_1 = k_1 + k_2 + \ldots + k_{m-1};\\
&l_2 = k_2 + \ldots + k_{m-1} \to k_1 = l_1 - l_2;\\
&l_3 = k_3 + \ldots + k_{m-1} \to k_2 = l_2 - l_3, \ldots;\\
&l_{m-3} = k_{m-3} + k_{m-2} + k_{m-1};\\
&l_{m-2} = k_{m-2} + k_{m-1} \to k_{m-3} = l_{m-3} - l_{m-2};\\
&l_{m-1} = k_{m-1} \to k_{m-2} = l_{m-2} - l_{m-1}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Тогда выражение (6) можно переписать в виде

$$
Q_m(N) = \sum_{l_1=-\infty} p_{N-l_1} \sum_{l_2=-\infty} p_{l_1-l_2} \cdots \sum_{l_{m-1}=-\infty} p_{l_{m-2}-l_{m-1}} p_{l_{m-1}}. \tag{9}
$$

Учитывая, что $p_k = 0$ при $k \le 0$, нетрудно видеть, что в (9) будут отличны от 0 только те слагаемые, для которых выполняется система неравенств

$$
\begin{aligned}
&l_{m-1} > 0;\\
&l_{m-2} - l_{m-1} > 0;\\
&l_{m-3} - l_{m-2} > 0;\\
&\ldots\\
&l_1 - l_2 > 0;\\
&N - l_1 > 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Нетрудно видеть, что необходимым условием, при котором удовлетворяется система неравенств (10), является положительность $l_i\ i = 1,2,\ldots,m-1 \in N$. Тогда (9) можно записать в виде

$$
Q_m(N) = \sum_{l_1=1} p_{N-l_1} \sum_{l_2=1} p_{l_1-l_2} \cdots \sum_{l_{m-1}=1} p_{l_{m-2}-l_{m-1}} p_{l_{m-1}},\ N > 0. \tag{11}
$$

В выражении (11) перейдем к матричной записи. Введем столбцы

$$
\{Q_m\}_i = Q_m(i),\ i = 1,2,\ldots. \tag{12}
$$

и

$$
\{p\}_i = p_i\ ,\ i = 1,2,\ldots \tag{13}
$$

и матрицу

$$
[P]_{ij} = p_{i-j}\ , i = 1,2\ldots,\ j = 1,2,\ldots. \tag{14}
$$

Тогда (11) запишется в виде

$$
\{Q_m\} = [P]^{m-1}\{p\}. \tag{15}
$$

Из области определения p_i следует, что $[P]_{ij} = 0$, при $i \le j$, тогда в выражении (15) матрица $[P]$ имеет форму нижней треугольной матрицы с нулевой диагональю. Рассмотрим случай, когда множество значений l, в ко-

тором $p_l > 0$, конечно и ограничено сверху $l \quad L$ (ядро p). Тогда нижний треугольник матрицы $[P]$ вырождается в ленту шириной L, и матрица имеет следующий вид:

$$[P] = \begin{array}{l} 0\ldots \\ p_1 0\ldots \\ p_2\, p_1 0\ldots \\ . \qquad \ldots \\ . \qquad\qquad \ldots \\ . \qquad\qquad\qquad \ldots \\ p_L \quad \ldots \qquad p_1\, 0\ldots \\ 0 \quad p_L \qquad \ldots \quad p_1\, 0\ldots \\ 0 \quad 0 \quad p_L \ldots \qquad p_1\, 0\ldots \\ \qquad\quad \ldots \end{array} \tag{16}$$

Матрица P обладает следующим свойством: результатом умножения слева матрицы P на вектор с границами ядра $L_1 \quad l \quad L_2$ будет также вектор с конечным ядром, имеющим границы $L_1 + 1 \quad l \quad L_2 + L$. Таким образом, в результате воздействия матрицы P на вектор с конечным ядром ядро растягивается и сдвигается на 1. Если распределение вероятностей сложного пуассоновского потока представить в форме столбца $\{P(t_0,T)\}_i = P(i;t_0,T)$, $i = 1,2,\ldots$, тогда из (1),(7),(12) и (15) следует, что

$$\{P(t_0,T)\} = e^{-a(t_0,T)} \sum_{m=1} \frac{(a(t_0,T))^m}{m!} [P]^{m-1} \{p\} \ . \tag{17}$$

Численная оценка распределения вероятностей. Для того чтобы оценить количество слагаемых M, при котором конечная сумма в правой части (17) с заданной точностью ε аппроксимирует $\{P(t_0,T)\}$, оценим норму разности векторов

$$\begin{aligned} &\left\| \{P(t_0,T)\} - e^{-a(t_0,T)} \sum_{m=1}^{M} \frac{(a(t_0,T))^m}{m!} [P]^{m-1} \{p\} \right\| = \\ &= e^{-a(t_0,T)} \left\| \sum_{m=M+1} \frac{(a(t_0,T))^m}{m!} [P]^{m-1} \{p\} \right\|. \end{aligned} \tag{18}$$

Очевидно, что

$$\|\{p\}\|_1 = \sum_{i=1} |p_i| = 1 \tag{19}$$

и

$$\|[P]\|_1 = \max_j \sum_{i=1} |[P]_{ij}| = \sum_{i=1}^{L} p_i = 1\,. \tag{20}$$

Отсюда

$$\left\| {}_{m=M+1} \frac{(a(t_0,T))^m}{m!}[P]^{m-1}\{p\} \right\| \quad {}_{m=M+1} \frac{(a(t_0,T))^m}{m!}. \qquad (21)$$

Правая часть в (21) есть не что иное, как остаточный член $R_M(x)$ разложения e^x в ряд Маклорена. Представим $R_M(x)$ в форме Лагранжа [3]:

$$R_M(x) = \frac{x^{M+1}}{(M+1)!} e^{\theta x}, \text{где} \quad 0 < \theta \quad 1. \qquad (22)$$

Тогда для правой части (21) получаем оценку

$$ {}_{m=M+1} \frac{(a(t_0,T))^m}{m!} \quad \frac{(a(t_0,T))^{M+1}}{(M+1)!} e^{a(t_0,T)}. \qquad (23)$$

Обозначим $n = M + 1$. Для оценки $n!$ используем формулу Стирлинга [3]

$$n! = \sqrt{2\pi n} \; \frac{n}{e}^{\,n} e^{\frac{\theta}{12n}}, \text{где} \quad 0 < \theta < 1, \qquad (24)$$

откуда получаем оценку

$$\frac{(a(t_0,T))^n}{(n)!} \quad \frac{(a(t_0,T))^n}{\sqrt{2\pi n} \; \frac{n}{e}^{\,n}}. \qquad (25)$$

Используя (18), (21),(23) и (25), получаем, что если найти такое минимальное значение n, при котором выполняется неравенство

$$\frac{a(t_0,T)e}{n}^{\,n} \quad \varepsilon \sqrt{2\pi n}, \qquad (26)$$

тогда будет также выполнено неравенство

$$\left\| \{P(t_0,T)\} - e^{-a(t_0,T)} {}_{m=1}^{n-1} \frac{(a(t_0,T))^m}{m!}[P]^{m-1}\{p\} \right\| \quad \varepsilon \quad . \qquad (27)$$

Обсуждение результатов. Используя метод половинного деления, для заданного ε можно легко найти $\min(n)$, при котором выполняется неравенство (26), в зависимости от $a(t_0,T)$. Например, если обозначить $M = [a(t_0,T)*e] + \Delta M$ ([*a*] –целая часть *a*), то при $\varepsilon = 0{,}001$, можно получить зависимость ΔM от $a(t_0,T)*e$, представленную в таблице.

Зависимость ΔM от плотности потока покупателей

Интервал изменения $a(t_0,T)*e$	ΔM
0 1	2
2 382	3
383 2909	2
2910 21537	1
21538	0

Таким образом, видно, что поправка ΔM существенна лишь при малых значениях $a(t_0,T)*e$.

При оценке распределения продаж необходимо учитывать, что согласно центральной предельной теореме при $a(t_0,T)\to$ оно должно стремиться к нормальному. На деле если ядро распределения потребностей покупателя локализовано в пределах $0 \quad 20$, то уже при значениях $a(t_0,T):\ 7 \quad 10$ вид распределения продаж практически не отличается от нормального.

Если же распределение потребностей покупателя в товаре имеет «длинный хвост», то, например, распределение величин ежедневных продаж может существенно отличаться от гауссовского. На рис.1 показано такое распределение некоторого товара сантехнической группы, полученное по выборке из 2346 покупок, предоставленной торговой компанией ЗАО «Билд».

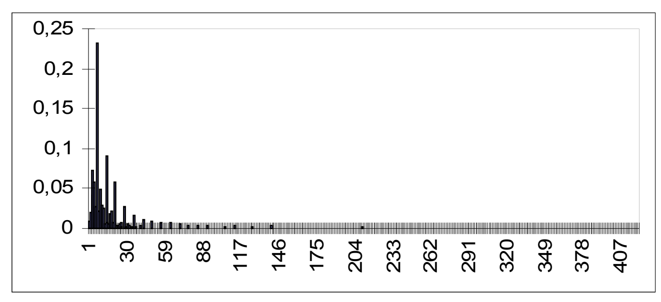


Рис.1. Распределение потребностей покупателя

Ядро этого распределения локализовано в интервале $0< L \quad 420$. На рисунке хорошо видны пики распределения, соответствующие покупкам, размеры которых кратны 7. Это объясняется тем, что этот товар в основном покупали упаковками по 7 штук. Ряды покупателей этого товара и продаж за 2004 год показаны на рис. 2 и 3. На них также представлены тренды этих рядов, полученные методом «скользящего среднего» с шириной окна, равной 30 дней. На рисунках хорошо виден нестационарный характер этих рядов. Наличие отрицательных значений в ряде продаж объясняется тем, что в данном представлении учтены возвраты товара покупателями, которые учитывались с отрицательным знаком.

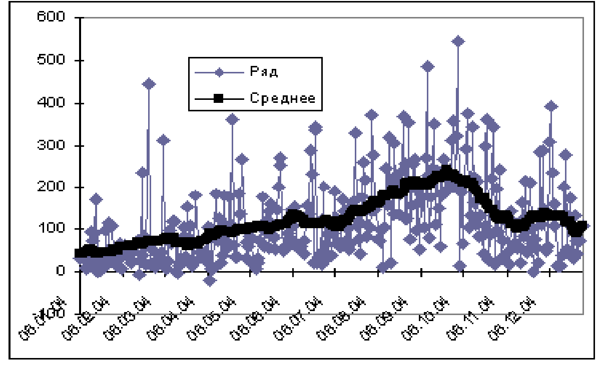


Рис.2. Временной ряд ежедневных продаж

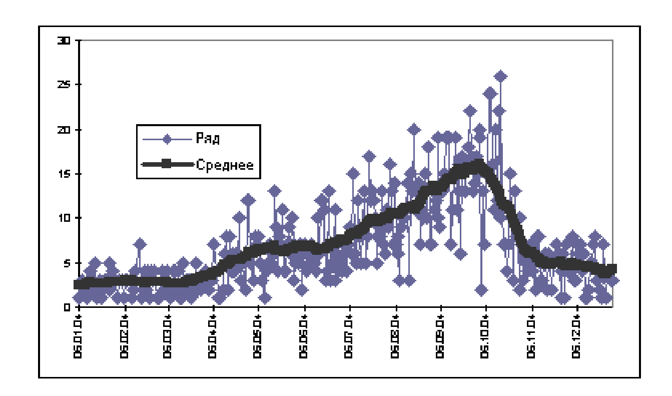


Рис.3. Временной ряд покупателей

На рис.4 и 5 представлены гистограммы распределения вероятностей ежедневных продаж 07.05.04 и 22.09.04 соответственно, вычисленные с погрешностью 0,001. Оценки плотностей потока покупателей в эти дни соответственно 5,8 и 15,07 покупателей в день.

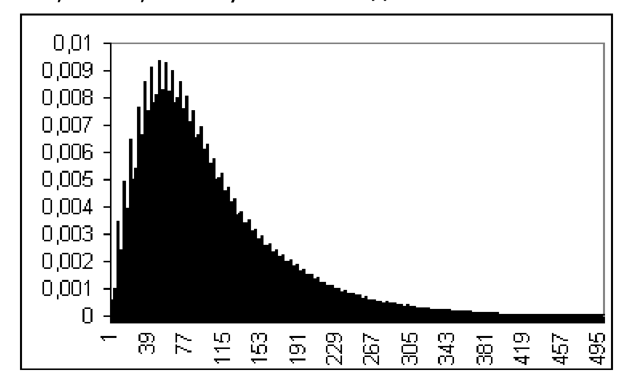


Рис.4. Распределение продаж от 07.05.04

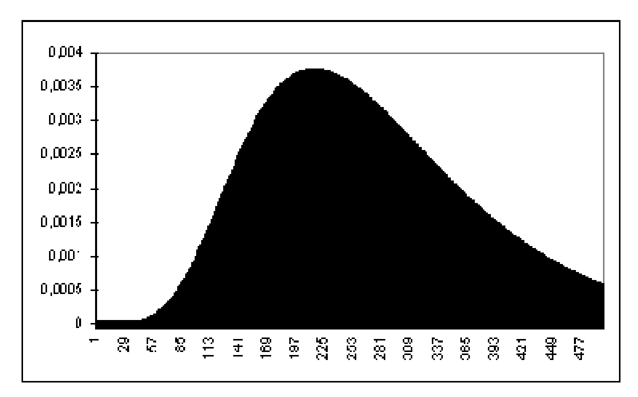


Рис.5. Распределение продаж от 22.09.04

На рис.4 хорошо видно влияние упаковок на распределение продаж, на рис.5 это влияние уже нивелировано. Расчеты проводились в системе «1С предприятие» на PC Pentium-IV 1,2 Ггц, время расчета 2 мин и 3 мин 34 сек соответственно.

Выводы. Разработанный алгоритм численной оценки распределения вероятностей для сложных пуассоновских потоков показывает, что в случае большого разброса потребностей покупателей в товаре размеры ежедневных продаж могут иметь существенно негауссовское распределение.

Библиографический список

1. *Натан А.А.* Стохастические модели в микроэкономике: Учеб. пособие / А.А.Натан. – М. МФТИ, 2001. – 172 с.
2. *Зеваков А.М.* Логистика материальных запасов и финансовых активов / А.М. Зеваков.– Спб.; Питер, 2005. – 352 с.
3. *Фихтенгольц Г.М.*Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2 / Г.М.Фихтенгольц. – М.: Наука, 1969. – 800 с.

Материал поступил в редакцию 15.10.07.

Y.A.LUKONIN, A.Y.LUKONIN

STOCHASTIC MODELING OF THE PROCESSES OF THE SALE BY MEANS OF COMPLEX POISSON FLOW

The casual processes of the sale are considered as casual Poisson flow of the all-stock deals, sizes which also are a random quantity. It is shown that if the known distribution of probability of the sizes of the deals and density of the flow of the buyers, that possible calculate distribution of probability of the sizes of the sale. There are laid down conditions, under which this sharing the sale will not be normal. Cite an instance distribution in real process of the sale, which are differ from Gauss distribution .

ЛУКОНИН Юрий Андреевич (р.1955) кандидат технических наук, доцент кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» (ПОВТиАС) ДГТУ. Окончил РГУ по специальности «Физика» (1977).
Научные интересы: математические методы и модели в экономике.
Автор 13 публикаций.

ЛУКОНИН Антон Юрьевич (р.1983) аспирант кафедры ПОВТиАС ДГТУ. Окончил ДГТУ по специальности «Сервис и техническая эксплуатация автотранспортных средств» (2005).
Научные интересы: математические методы и модели в экономике.
Автор 4 публикаций.